CARLO COSMELLI

PRINCIPI DI FISICA

(PER FILOSOFI)

PARTE VI

MECCANICA QUANTISTICA

1. INTRODUZIONE

1.2. La meccanica quantistica

La Meccanica Quantistica e la Relatività sono due teorie, entrambe rivoluzionarie, che hanno cambiato radicalmente la nostra visione del mondo. Tuttavia c'è una differenza fondamentale fra le due.

La Relatività modifica la nostra visione dello spazio-tempo, può sembrarci strano che i tempi e gli spazi siano relativi…ma quello che succede non è assurdo: abbiamo oggetti più corti...tempi dilatati, ma non sono misure «impossibili».
La Meccanica Quantistica, invece, introduce delle spiegazioni talvolta «incomprensibili», la sua logica non è quella a cui siamo abituati. Si tratta di una nuova rappresentazione degli elementi della realtà microscopica che talvolta contrastano con il senso comune. I fisici spesso incontrano problemi quando cercano di interpretare i risultati della meccanica quantistica: spesso si è obbligati ad accettare le sue previsioni, senza doverle necessariamente capire fino in fondo.

Questa è la ragione per cui molti fisici non l'hanno accettata, o la rifiutano in toto, o cercano, ancora oggi, teorie alternative. Vedi, tanto per fare qualche esempio cosa hanno detto della MQ una serie di fisici illustri. E' da notare che molti di questi hanno preso il premio nobel per le loro ricerche sulla MQ…

Dichiarazioni e affermazioni varie sulla QM

- Sulla quantizzazione delle orbite atomiche (Bohr, 1911)

– "Il modello è "inutilizzabile" (Lord Rayleight, GB)
– "Abbandonerei la fisica se l'ipotesi venisse mai confermata" (Max von Laue, D).
– "Alla luce di questi fatti ci si potrebbe domandare se la fisica sia ancora la più solida tra le scienze naturali" (Max Planck, 1923)
– "L'idea che un elettrone esposto a radiazione possa scegliere ***liberamente*** l'istante e la direzione in cui spiccare il salto è per me intollerabile. Se così fosse, preferirei fare il ciabattino, o magari il biscazziere, anziché il fisico. (Max Born, 1924).
– "…non sono competente a tenere questa relazione…anche perché non accetto il punto di vista puramente statistico su cui si basano queste teorie (Max Born, 1924).

- Situazione inaccettabile da tutti coloro che non sono "disponibili ad abbandonare senza combattere una causalità rigorosa" (A. Einstein et al.).
- "Non mi piace, e mi spiace di averci avuto a che fare" (Erwin Schrödinger).
- "Più la teoria dei quanti ha successo, più sembra una sciocchezza" (A. Einstein).
- "E' indubitabile, a mio parere, che questa teoria contenga un frammento della verità ultima" (A. Einstein).
- Quelli che non rimangono scioccati, la prima volta che si imbattono nella meccanica quantistica, non possono averla compresa (Niels Bohr).
- Se credete di aver capito la teoria dei quanti, vuol dire che non l'avete capita (R. Feynman).
- Penso si possa tranquillamente affermare che nessuno capisce la meccanica quantistica. (R.Feynman)
- Sono fatto così: voglio sempre capire. (Richard P. Feynman).

- Io devo sapere. (Galileo - B. Brecht).

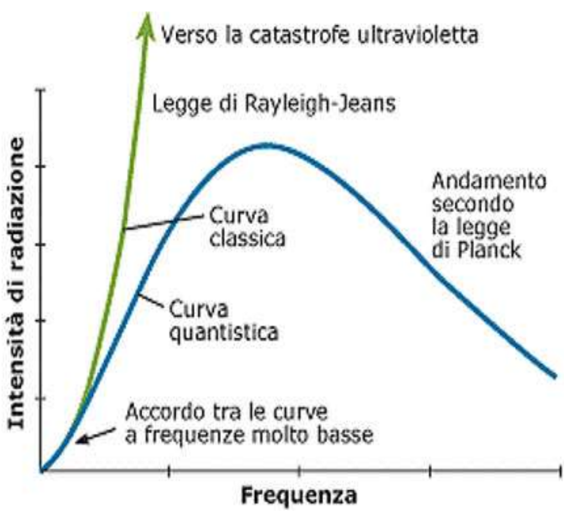
Su Dio & i suoi dadi:

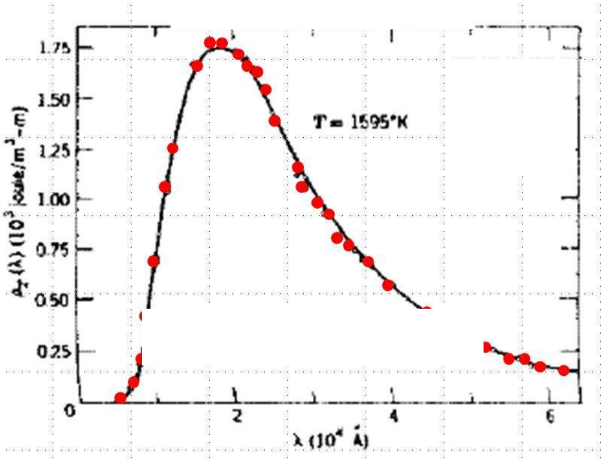
- "Dio non gioca a dadi con l'universo." (A. Einstein)
- "Piantala di dire a Dio che cosa fare con i suoi dadi." (Niels Bohr)
- "Dio non solo gioca a dadi, ma bara." (J. Bell)

La meccanica quantistica nasce nel 1900 con un articolo di Max Planck. E' una teoria amata, e spesso odiata anche da chi l'aveva creata; uno dei rari casi in cui, anche chi l'aveva creata, in seguito non ne accetterà le conseguenze (senza che fossero insorte incongruenze od errori).
La Meccanica Quantistica è spesso illogica, in parte oscura… ma funziona incredibilmente bene per spiegare quello che si osserva in natura e per prevedere effetti mai osservati prima.

1.3. La nascita della MQ

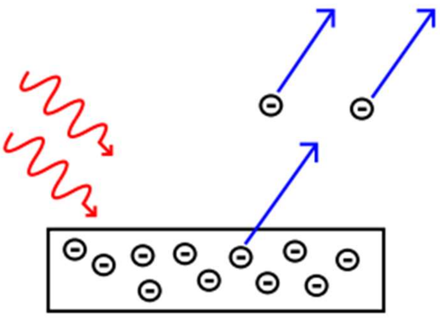
Nel 1900 Max Planck risolve il problema dell'emissione «infinita» di energia del corpo nero con una ipotesi ad hoc: l'energia fra radiazione (luce) e materia viene **scambiata** per multipli interi di una grandezza costante: il QUANTO di energia. Il quanto di energia vale $E = hf$; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$, e f è la frequenza dell'onda elettromagnetica.





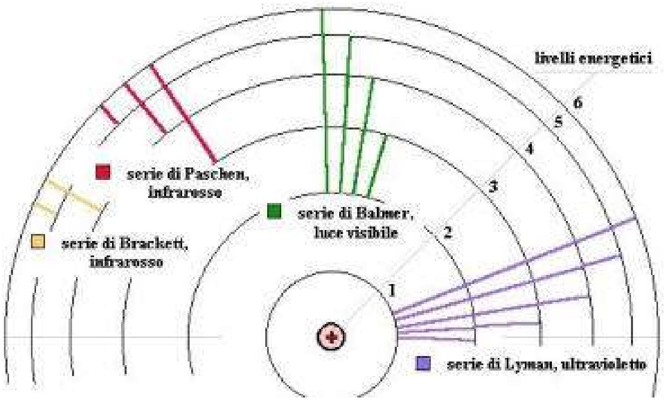
Da dove viene questa assunzione? Solo dal tentativo di avere una formula matematica che fornisse delle previsioni accettabili. Planck non spiega perché funziona…ma funziona! Le previsioni teoriche descrivono perfettamente i dati sperimentali.

Albert Einstein il 17 marzo 1905 risolve il problema dell'effetto fotoelettrico: se mando luce su di un metallo posso «strappare» elettroni al metallo, ma solo se la luce ha una frequenza minima.
Altrimenti non serve aumentare l'intensità della luce…non succede nulla.
Cosa dice Einstein nel suo articolo: l'energia della luce è **distribuita** nello spazio con discontinuità: la luce è trasportata da fotoni di energia $E = hf$…



PROBLEMA: Ma la luce non era un'onda? Se la radiazione, cioè la luce, è quantizzata, perché non vedo tanti lampi luminosi in sequenza quando guardo una luce?
Bohr nel 1912 spiega la stabilità degli atomi, le righe spettrali…: **Gli elettroni, in un atomo, possono muoversi solo su alcune orbite ben definite e immutabili.** Gli elettroni possono solo saltare da un'orbita all'altra…oppure saltare via. Ogni orbita può accogliere un numero massimo di elettroni. In ogni orbita l'elettrone ha una certa energia, quando salta ad un'altra orbita la cede o la assorbe, e ho l'emissione o l'assorbimento di un'energia $E = hf$

Le lunghezze d'onda delle righe erano descritte dalla formula empirica, trovata nel 1888 da J. Rydberg: $\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, dove n = 3, 4, 5.
Secondo **Bohr** le righe corrispondono ai salti degli elettroni fra le varie orbite. Le orbite hanno delle forme sempre più complicate aumentando «n»
Il modello di Bohr descrive correttamente i valori delle lunghezze d'onda relative alle righe emesse dagli atomi, spiega perché gli atomi sono stabili, spiega perché sono tutti identici.



Ma per quale motivo gli elettroni possono stare solo su certe orbite? Non si sa…ma così funziona

Nella sua tesi di Dottorato De Broglie propone un'ipotesi teorica rivoluzionaria: ad ogni particella di massa **m** e velocità **v** è «associata» un'onda di lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$ dove **h** è la costante di Planck.

Quindi ogni particella si comporta «anche» come un'onda[1].

[1] De Broglie dice che ad ogni particella è associata un'onda…ma perché devo utilizzarla per calcolare cosa succede ad un elettrone in un atomo e non ad un corpo, per esempio un pianeta intorno al Sole? La lunghezza d'onda associata ad un corpo è: $\lambda = \frac{h}{mv}$ e gli effetti li vedo quando il corpo interagisce con oggetti delle dimensioni di λ.

A questo punto dobbiamo vedere bene cosa sia un'onda, quali sono le grandezze che la caratterizzano, e le sue proprietà.

2. Onde [questa parte va spostata nel III capitolo sull' e.m.]

In fisica, con il termine onda, si indica una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio, trasportando energia o quantità di moto senza comportare un associato spostamento della materia.

Nota: un'onda è una perturbazione che **può** propagarsi; esistono anche onde che non si propagano, vedi dopo "onde stazionarie".

Le onde possono propagarsi sia attraverso un materiale, sia nel vuoto. Ad esempio la radiazione elettromagnetica (la luce) può esistere e propagarsi anche in assenza di materia, mentre altri fenomeni ondulatori (le onde sonore) esistono unicamente in un mezzo, che deformandosi produce le forze elastiche di ritorno che permettono all'onda di propagarsi.

Vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_(fisica)

Punti chiave:

- Un'onda è una "perturbazione" che si trasmette, la perturbazione può avere una forma qualunque, non necessariamente un'onda sinusoidale.
- Tuttavia, quando si parla di onde, si utilizza come forma base una funzione sinusoidale; questo perché esiste un teorema (Fourier) che dice che qualunque "forma", per un'onda, può essere scritta come una somma di seni e coseni (cioè di funzioni trigonometriche). Quindi la descrizione del comportamento delle onde può essere fatta rigorosamente considerando solo onde sinusoidali.

Parametri di un'onda[2]:

L'onda più generale possibile, che viaggia nel tempo **t** e nella direzione ***x*** si può scrivere come:

$$A(x,t) = A_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)$$

A(x,t) è la grandezza che rappresenta l'onda; nel caso di un'onda del mare rappresenta lo spostamento di un punto della superficie del mare, nel caso del suono che viaggia nell'aria rappresenta lo spostamento delle molecole dell'aria, nel caso della luce l'ampiezza del campo Elettrico e Magnetico...

Nota che al posto del cos(…), si può usare anche il sen(…), è solo un cambio del sistema di riferimento

La Terra: $\lambda = \frac{h}{M_T V_T} = \frac{6.6\ 10^{-34}}{6\ 10^{24} \cdot 30\ 10^3} \cong 4\ \cdot 10^{-63}\ \text{m}$

Una palla da tennis: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6\ 10^{-34}}{60\ \text{g}\ 200\ \text{km/ora}} \cong 2\ \cdot 10^{-34}\ \text{m}$

Un granello di polvere da 1μm: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6\ 10^{-34}}{10^{-15}\ \ 1\ \text{cm/s}} \cong 0{,}7\ \cdot 10^{-16}\ \text{m}$

Un elettrone (nell'atomo di H): $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6\ 10^{-34}}{0{,}9 \cdot 10^{-30}\ 2{,}3 \cdot 10^6} \cong \mathbf{3{,}2\ \cdot 10^{-10}\ m}$

…il diametro dell'atomo di H è circa 1· 10^{-10} m, la circonferenza ≅ 3,1 · 10^{-10} m

[2] Questi termini vanno imparati e capiti bene, altrimenti non si può sperare di capire qualunque fenomeno che riguardi le onde, e in particolar modo la meccanica quantistica.

I parametri caratteristici di un'onda sono:

- $\mathbf{A_0}$, ampiezza dell'onda. E' l'ampiezza massima dell'onda, cioè di quanto vibra, o quanto vale al massimo della sua escursione, la grandezza che sta oscillando. Dato che il coseno può andare da un minimo di -1 ad un massimo di 1, l'ampiezza totale dell'onda $\mathbf{A(x,t)}$ varierà da $-\mathbf{A_0}$ a $\mathbf{A_0}$.

- **T,** il periodo dell'onda. Disegnando l'andamento dell'onda per una **x** costante (vuol dire che l'osservatore si mette in punto fisso e misura l'onda in funzione del tempo), avremo la forma, nel caso x=0 (vedi figura 1):

$$A(t) = A_0\cos(\omega t + \varphi) = A_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}\, t + \varphi\right)$$

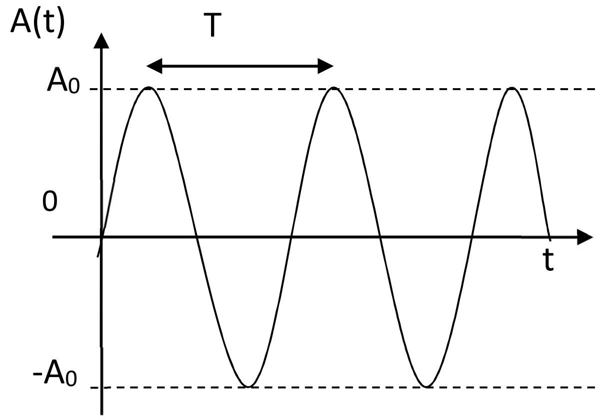


Fig.1 Andamento di un'onda sinusoidale in funzione del tempo t, fissato un certo x.

Dove **T** è la periodicità dell'onda in funzione del tempo, cioè quanto tempo ci mette a tornare nello stesso stato. Il periodo **T** è legato alla pulsazione dell'onda ω ed alla frequenza dell'onda *υ*, dalle relazioni:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad T = \frac{1}{\nu} \quad , \quad \omega = 2\pi\upsilon$$

- **λ,** la lunghezza d'onda. Disegnando l'andamento dell'onda in funzione della posizione **x**, per una **t** costante (vuol dire "fotografare" la funzione ad un istante qualunque fissato), ho la forma, nel caso t=0:

$A(x) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi\right)$

Dove λ, la lunghezza d'onda, è la periodicità dell'onda in funzione della posizione. Vedi figura 2.

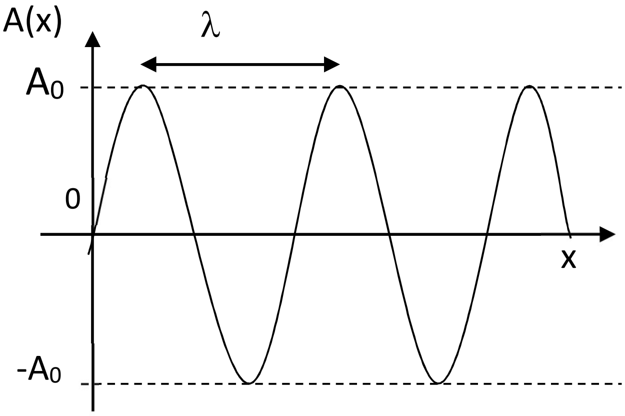


Fig.2 Andamento di un'onda sinusoidale in funzione della posizione x, una volta fissato un istante di tempo

- $\lambda, \upsilon, \mathbf{v}$: La lunghezza d'onda λ, la frequenza υ, e la velocità **v** con cui si propaga l'onda sono legate dalla seguente relazione

$$v = \lambda \cdot \nu$$

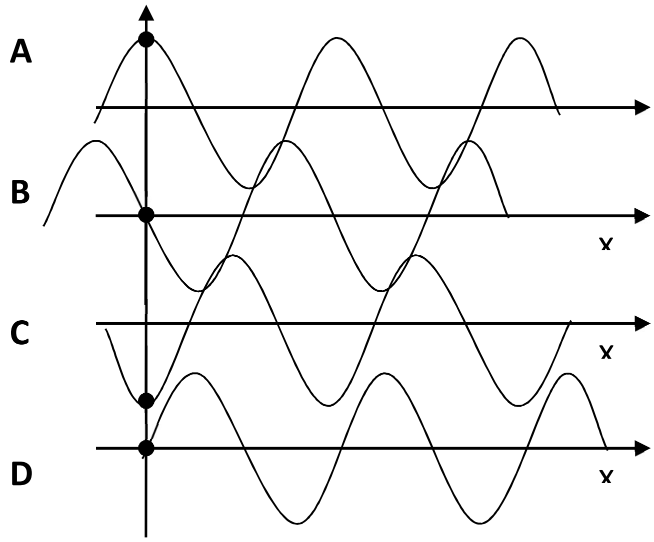
Il valore della velocità con cui si trasmette l'onda dipende dalle caratteristiche del mezzo in cui si trasmette l'onda e dalle caratteristiche dell'onda di partenza.

Ricordarsi che, mentre nel caso della luce nel vuoto la velocità delle onde e.m. è una costante universale c, ed è la massima possibile con cui può trasmettersi un qualunque segnale, qualunque altro segnale, nei mezzi materiali la luce si muove a velocità inferiori a c, in generale:

$v(\text{luce}) = \frac{c}{n(\nu)} \leq c$, $n(\upsilon) \geq 1$ è l'indice di rifrazione del materiale, che in genere dipende dalla lunghezza d'onda della luce (sole al tramonto, arcobaleno, scomposizione della luce solare nei vari colori…), e dalle caratteristiche del materiale; per il vuoto n=1.

- **φ,** la fase d'onda. Se scriviamo la forma d'onda al tempo **t=0** , e nel punto **x=0** abbiamo:

$A(0,0) = A_0 \cos(\varphi)$, il valore della fase è un'indicazione legata all'ampiezza dell'onda all'istante iniziale e nel punto iniziale (x=0 e t=0 non corrispondono necessariamente a **dove** è stata emessa ed a **quando** è stata emessa, le origini degli assi sono convenzionali).



Vedi in figura alcuni casi particolari:

A: $\varphi = 0 \quad \rightarrow \cos\varphi = 1 \quad \rightarrow \quad A(0,0) = A_0$

B – D: $\varphi = \pm 90° \quad \rightarrow \cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad A(0,0) = 0$

C: $\varphi = 180° \quad \rightarrow \cos\varphi = -1 \quad \rightarrow \quad A(0,0) = -A_0$

Per maggiori dettagli vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_(fisica)

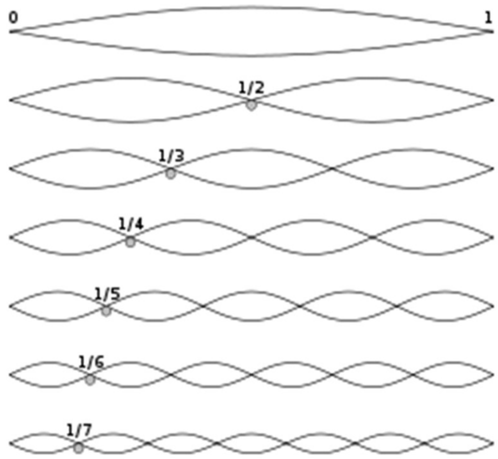
Fra tutte le modalità con cui si può descrivere un'onda, o che si incontrano nella realtà fisica, ve ne sono alcune di fondamentale importanza nella descrizione di molti fenomeni:

L'onda stazionaria, l'onda piana e l'onda trasversale.

L'onda stazionaria è un'onda che non "trasporta" una perturbazione, essendo **limitata nello spazio**. La limitazione è dovuta alla limitazione dello "spazio" in cui l'onda può oscillare.

Ad esempio l'onda con cui oscilla la corda di un pianoforte o di una chitarra. In questo caso l'oggetto che oscilla (per esempio la corda) ha gli estremi fermi, mentre alcune sue parti oscillano. L'onda stazionaria può esistere solo per alcune determinate lunghezze d'onda caratteristiche del mezzo, del tipo di oggetto…ecc.

In figura si vede come esempio una corda con gli estremi fissi, con i primi modi di oscillazione



possibili. Il numero rappresenta l'inverso dell'armonica. La prima, la seconda, la terza…

Quindi l’onda stazionaria è **quantizzata.** Una corda di una certa lunghezza e con una certa tensione, una volta colpita, emetterà suoni solo alla sua frequenza fondamentale υ_0 (per esempio un “la”) e/o alle frequenze $2\upsilon_0$, $3\upsilon_0$, $4\upsilon_0$…

Per dettagli e per ”vedere” come oscilla un’onda stazionaria vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_stazionaria

L’onda piana è un’onda che si propaga, virtualmente infinita, ed i cui fronti d'onda sono infiniti piani paralleli di ampiezza costante normali alla direzione di propagazione. Vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_piana

Un esempio approssimato è quello di un’onda del mare, che viene da molto lontano...e il cui fronte d’onda (l’onda vera e propria) è perpendicolare alla direzione di propagazione.

L’onda trasversale è un’onda in cui le particelle del mezzo in cui si propaga l'onda oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione. Vedi: http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_trasversale

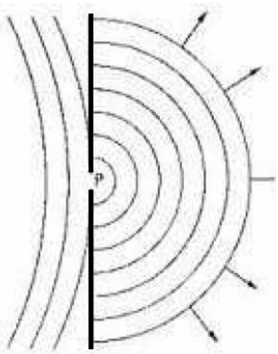
Importante: sono trasversali le onde di un corda di chitarra/pianoforte che vibra, ed anche le onde elettromagnetiche (la luce). In questo caso la grandezza che oscilla è il campo Elettrico (e/o Magnetico).

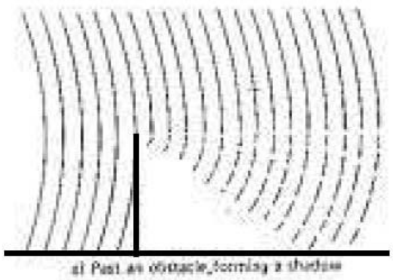
2.1. Alcuni fenomeni che avvengono con le onde

2.1.1. Diffrazione

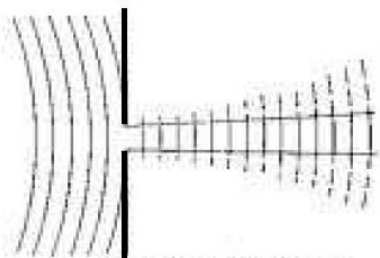
La diffrazione è il fenomeno per cui un’onda, che incontra un ostacolo, genera una serie di onde che possono essere descritte come se l’ostacolo fosse una sorgente di onde sferiche. Il fenomeno avviene essenzialmente (cioè gli effetti sono macroscopici) quando l’ostacolo ha dimensioni dell’ordine di grandezza o minori della lunghezza d’onda dell’onda che incide sull’ostacolo. Questa è anche la scala con cui l’onda “interagisce” con l’ostacolo.

Per esempio (vedi figure) se un’onda incide su di uno schermo con un “piccolo foro”, al di là dello schermo la luce sarà “come se” fosse stata generata da una sorgente puntiforme posta nel foro.





a) Past an obstacle, forming a shadow



b) Through an opening, forming a beam

Se l’onda incontra un ostacolo (un muro) succede la stessa cosa

Gli effetti si vedranno in questi casi:

Suono udibile: $\lambda \sim$ 10m-2cm. Il suono “gira” intorno alle porte, alle case… gli strumenti musicali hanno queste dimensioni tipiche.

Luce visibile: $\lambda \sim 0{,}4\text{-}0{,}7 \ \ 10^{-6}$ m. Per vedere gli effetti della diffrazione della luce servono ostacoli "piccoli" (cd).

Onde radio LF/MF, basse/medie frequenze $\lambda \sim$ 10km-100 m. il segnale radio AM oltrepassa case, montagne…

Onde radio VHF/UHF: $\lambda \sim$ 10m – 10 cm. Il segnale radio FM-TV- cellulari, l'antenna deve essere lunga da qualche metro (TV) a pochi centimetri (cellulare). Il segnale viene fermato da una casa, una montagna…

Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Diffrazione

2.1.2. Interferenza

L'interferenza è il fenomeno legato alla somma di due (o più) onde che hanno la stessa frequenza. Il risultato dipende **essenzialmente** dalla fase relativa.

Quello che si ha è che, partendo da due onde con identica pulsazione ω e, per semplicità, con la stessa ampiezza A_0, se ne facciamo la somma, ovviamente nello stesso istante t, si ha:

partiamo dalle due onde A_1 e A_2: $A_1(x,t) = A_0\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_1+\varphi_1\right)$; $A_2(x,t)=A_0\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x_2+\varphi_2\right)$

e sommiamole: $A_{\,TOT} = A_1(x,t) + A_2(x,t) = 2A_0 + 2A_0\cos\left(\Delta\varphi + \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\right)$

Se, per esempio, le onde hanno percorso la stessa distanza da una origine comune, quindi se $\Delta x=0$, ho:

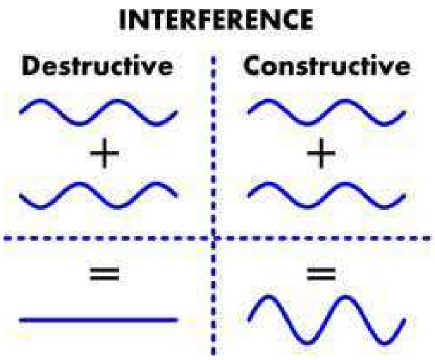
Interferenza distruttiva: $\boldsymbol{\Delta\varphi = 180° \ \rightarrow \ \cos 180° = -1 \ \rightarrow \ A_{TOT} = 2A_0 - 2A_0 = 0}$ **Non c'è nulla!**

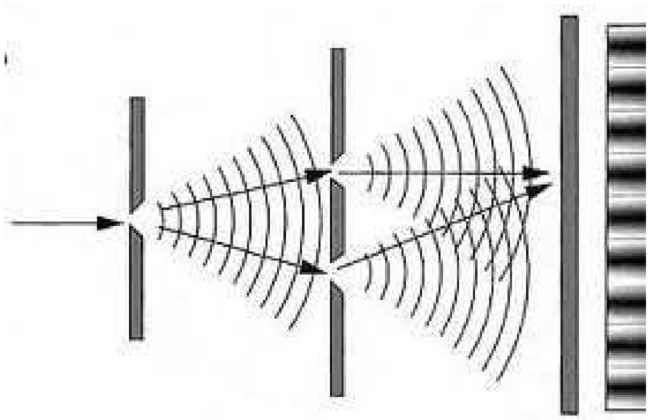
Interferenza costruttiva: $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0 \ \rightarrow \ \cos 0 = 1 \ \rightarrow \ A_{TOT} = 2A_0 + 2A_0 = 4A_0}$ **C'è un'onda!**

Quello che succede è che l'energia si "ridistribuisce" nello spazio, in alcuni punti ho più energia di prima (interferenza costruttiva: $A_{TOT} = 4A_0$), in altri punti non ho nessun onda (interferenza distruttiva, $A_{TOT} = 0$).

Vedi http://it.wikipedia.org/wiki/Interferenza_(fisica)

Se ad uno schermo con due piccoli fori arriva un'onda, avviene prima un fenomeno di diffrazione, e poi l'interferenza fra le onde che escono dai due fori. Il risultato è di avere alcune zone dello spazio in cui le onde si sommano ed altre in cui non c'è luce.

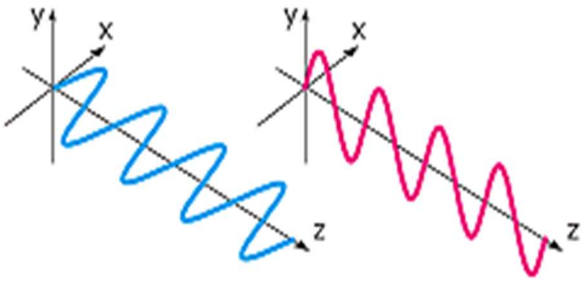




2.2. Polarizzazione

Nel caso di un'onda trasversale si chiama polarizzazione la direzione che ha, ad un certo istante di tempo, la grandezza che oscilla.

La polarizzazione può essere lineare (la direzione è costante nel tempo), circolare (la direzione ruota con velocità angolare costante), o una qualunque combinazione di due polarizzazioni lineari.



In figura si vede l'esempio di due onde polarizzate linearmente, una secondo l'asse x, l'altra secondo l'asse y.

Questa figura rappresenta anche l'andamento di un'onda elettromagnetica con polarizzazione lineare. Le due onde rappresentano le oscillazioni del campo elettrico e magnetico, che hanno sempre piani di oscillazione perpendicolari tra loro.

Al limite un'onda può non avere nessuna polarizzazione media; per esempio la luce che arriva sulla terra, o quella emessa da una lampadina incandescente, hanno una polarizzazione casuale, che varia con la frequenza di emissione dei fotoni. In questo caso si parla di onda non polarizzata.

3. Probabilità

La comprensione della nozione di probabilità è necessaria per farsi un'idea di quale sia il significato della Meccanica quantistica, esattamente come è stato necessario approfondire la nozione di onda.

Un evento casuale è definito come un evento che può presentarsi con varie modalità, ed il cui risultato è appunto "casuale", cioè singolarmente non predicibile:

- L'evento può avere più modalità.
- Ripetendolo identico a se stesso può portare a risultati diversi, non predicibili.

Anche se i singoli eventi sono casuali, le medie sul totale delle ripetizioni hanno valori definiti, sempre meno differenti all'aumentare delle ripetizioni. Si definisce la probabilità di un evento il rapporto tra il numero di eventi 'favorevoli' (n) e il numero di eventi totali (N), ovvero:

$$P(n) = \frac{n}{N} \text{ (si noti che la Probabilità è un valore a priori, teorico)}$$

Ad esempio, prendiamo un dado a sei facce; l'evento è il lancio di un dado, e la lettura del numero che sta sulla faccia superiore. Il numero di eventi possibili quindi è N = 6. Se diciamo che l'evento favorevole è (per esempio) l'uscita del 6, allora avremo che $P = \frac{1}{6}$.

Oppure diciamo che l'evento favorevole è l'uscita di un numero pari: il numero di eventi possibili è sempre N = 6 ma adesso il numero di eventi favorevoli è n = 3 perché in questo caso può essere un evento favorevole l'uscita della faccia con il numero 2, o 4 o 6. Quindi: $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$.

Da un punto di vista sperimentale il concetto di probabilità può essere basato sulla definizione frequentista: se eseguo N ripetizioni di un evento e conto il numero degli eventi favorevoli n, si definisce frequenza la quantità (sperimentale, quindi a posteriori)

$$f = \frac{n}{N}$$

Se $N \rightarrow \infty \Rightarrow |f - P| < \in$, dove $\in$ è un numero piccolo a piacere. La frequenza tende alla probabilità teorica quando il numero di ripetizioni che tende all'infinito.

La valutazione del numero di eventi favorevoli aspettati per un evento n_e sarà il prodotto della probabilità dell'evento P(e) per il numero di ripetizioni effettuate o prove N:

$$n_e = N \cdot P(e)$$

Ad esempio, la probabilità che esca testa (T) in un lancio di una moneta è $P(T) = \frac{1}{2}$; se faccio N = 200 lanci della moneta mi aspetto di osservare $n_e(T) = N \cdot P(T) = 200 \cdot \frac{1}{2} = 100$ eventi in cui è uscita Testa.

4. Comportamento quantistico di onde ed elettroni

Per capire la natura quantistica delle particelle microscopiche e il dualismo onda-particella consideriamo il seguente esperimento. Prendiamo un cannone che spara proiettili in maniera continua su un muro sul quale sono state praticate due fenditure (Fig. 1).

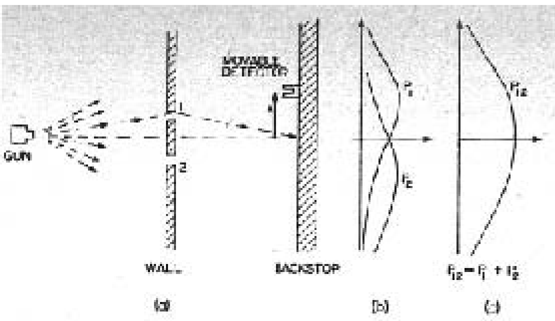


Figura 1: Esperimento delle due fenditure fatto con i proiettili.

Al di là del muro abbiamo una parete di fondo con un rivelatore mobile che può essere spostato avanti e indietro e che è in grado di contare i proiettili che passano per le fenditure [N_c]. Inoltre abbiamo un contatore che rivela l'emissione dei proiettili: emette un 'click' ogni volta che viene sparato un proiettile [N_s].

Supponiamo di chiudere prima la seconda fenditura e di contare quanti proiettili sono arrivati sulla parete di fondo passando attraverso la prima fenditura; poi facciamo il contrario. Otteniamo due curve P_1 e P_2 che rappresentano la probabilità che un proiettile arrivi sulla parete terminale quando viene aperta solo la prima o solo la seconda fenditura, rispettivamente, come il rapporto tra il conteggio dei proiettili che sono arrivati sul rivelatore e il numero totale dei proiettili sparati dal cannone [$P = \frac{N_c}{N_s}$].

Se ripetiamo l'esperimento con entrambe le fenditure aperte otteniamo una curva di distribuzione delle probabilità P_{12} che è la somma delle due distribuzioni di probabilità $P_{12} = P_1 + P_2$, avendo ben stabilito che i proiettili arrivano sulla parete di fondo uno per volta.

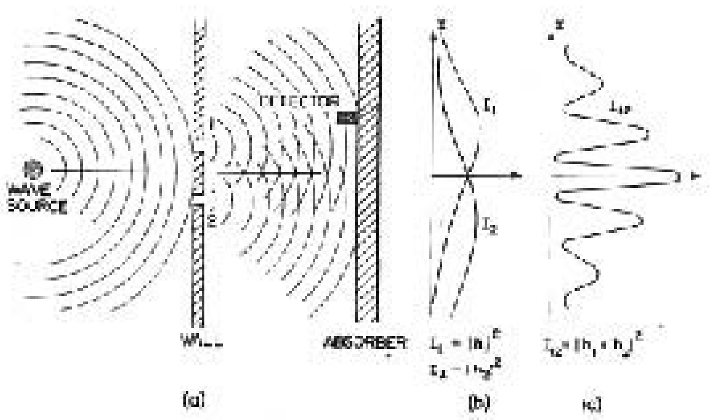


Figura 2: Esperimento fatto con le onde.

Adesso ripetiamo l'esperimento con onde (luce o acqua) al posto di proiettili e con un rivelatore che in questo caso misura l'ampiezza dell'onda A (Fig. 2). L'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza $I \propto A^2$. Procedendo come prima, vediamo che l'intensità dell'onda quando è chiusa la seconda fenditura risulta essere $I_1 = |A_1|^2$, mentre quando chiudiamo la prima fenditura è $I_2 = |A_2|^2$. Le due curve assomigliano a quelle ottenute nel caso dei proiettili. Quando però apriamo entrambe le fenditure, la curva di probabilità risultante non è più la somma (algebrica) delle due curve di probabilità, ma otteniamo una curva che definisce il fenomeno dell'interferenza, che è ben noto dalle leggi della fisica classica. Nella figura (2) si vede l'interferenza distruttiva (nei minimi della figura di interferenza) e l'interferenza costruttiva (nei massimi).

$$I_{12} = |A_1 + A_2|^2 = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta}_{termine\ di\ interferenza}$$

$$\text{Se } A_1 = A_2 = \sqrt{I} \rightarrow I_{12} = 2I + 2I\cos\delta$$

dove δ è la differenza di fase, che dipende dal cammino percorso Δx: $\delta = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$

Si vede che se $\Delta x = 0 \rightarrow \delta = 0,\ \cos\delta = 1 \rightarrow I_{12} = 4I$
Se invece $\Delta x = \mp\frac{\lambda}{2} \rightarrow \delta = \frac{\pi}{2},\ \cos\delta = -1 \rightarrow I_{12} = 0$

Infine ripetiamo l'esperimento ancora una volta, questa volta con elettroni, sparati da un cannone elettronico (Fig. 3). Il rivelatore è analogo al caso dei proiettili (si pensi ad un contatore Geiger): in ogni caso al passaggio di un elettrone questo emetterà un 'click'.

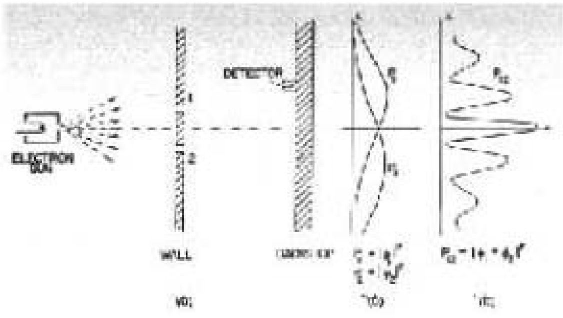


Figura 3: Esperimento fatto con elettroni.

Eseguendo l'esperimento secondo le modalità dei due casi precedenti possiamo notare che il contatore si comporta come nel caso dei proiettili: si sentono singoli 'click', di intensità (sonora) sempre uguale; ciò significa che gli elettroni arrivano al rivelatore uno per volta e tutti uguali tra loro. Per quanto riguarda i 2 casi in cui una sola delle due fenditure è aperta, la loro curva di probabilità è simile alle curve nel caso dei proiettili.

Quando però apriamo entrambe le fenditure si ottiene una curva di probabilità risultante che è simile a quella che si ottiene nel caso delle onde. Pur essendo una particella, l'elettrone interferisce (con chi?), comportandosi come un'onda.

In formule:
se $P_1 = |\Phi 1|^2$ e $P_2 = |\Phi 2|^2$ la probabilità congiunta $P_{12} \neq P_1 + P_2$ ma $P_{12} = |\Phi 1 + \Phi 2\,|^2$.

Ma con chi interferisce l'elettrone se ne arriva uno per volta al contatore (e non, per esempio, mezzo…)?

Cerchiamo di 'osservare' questi elettroni nel loro cammino, per vedere dove passano, per esempio piazzando una sorgente di luce tra le due fenditure (Fig. 4).

Vedremo un lampo vicino alla fessura 1 (o 2) se l'elettrone nel suo cammino fino alla parete di fondo passa vicino al primo (o secondo) foro. In questo caso ritroviamo gli stessi risultati dell'esperimento con i proiettili, come se la luce perturbasse a tal punto l'esperimento da cancellare l'interferenza.

Quindi non è possibile guardare gli elettroni che passano senza distruggere l'interferenza (Principio di Indeterminazione, forma debole).

Proviamo ad osservarli con una luce più debole per cercare di eliminare la perturbazione al sistema che questa produce. Una luce più debole non significa una energia minore, perché data la frequenza v, in ogni caso, ogni fotone ha $E = h\upsilon$, $p = \frac{h}{\lambda}$. Significa solo che ho meno fotoni al secondo, qualcuno intercetterà l'elettrone, così da vedere dove passa; qualcuno invece non intercetterà l'elettrone e non vedrà dove è passato. Nel primo caso non avremo interferenza, nel secondo si.

Allora diminuiamo l'energia del fotone, quindi diminuiamo la frequenza v, cioè aumentiamo la lunghezza d'onda λ. Adesso però non sappiamo più distinguere da quale fenditura è passato l'elettrone, perché vedremo solo un lampo diffuso tra le due fessure, e la risoluzione necessaria per distinguere due oggetti è $\sim\lambda$. In quest'ultimo caso però il nostro esperimento produce di nuovo la figura di interferenza.

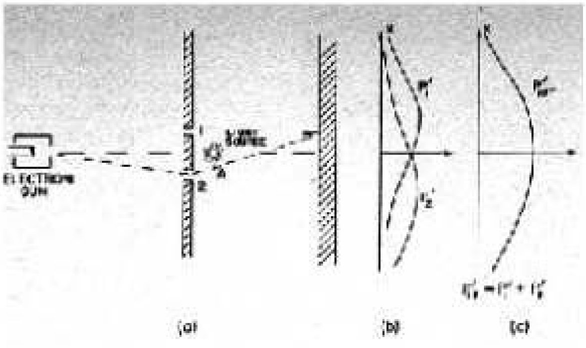


Figura 4: Cosa succede se poniamo una sorgente di luce tra le fenditure per osservare il passaggio degli elettroni

E questo è quanto predice il Principio di Indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

Possiamo riassumere i risultati degli esperimenti precedenti, in modo schematico con la tabella:

Esperimento	**'Oggetto'**	**Probabilità (Intensità) misurata**	$\mathbf{P_{12}}$	**Intera. ?**
Proiettili N	"Pacchetto" singolo "Oggetto" singolo	Discreto: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$	$P_1 + P_2$	NO
Onde sonore, onde luminose, Acqua	Onda di ampiezza A(x,t)	Grandezza continua: $I(x) = \lvert A(x)\rvert^2$ $= A_1 + A_2$ $+ 2\sqrt{A_1}A_2 \cos\delta$	$I_{12} = \lvert A_1(x) + A_2(x)\rvert^2$	SI
Elettroni, emessi uno per volta. Tutti con la stessa velocità v_e.	Onda di $\lambda = \frac{h}{p}$ Particella di m_e, v_e (Dualismo)	Discreto: $P(x) = \frac{n(x)}{N}$ Ma: figura di diffrazione	$P_{12} \neq P_1 + P_2$ Onda con $I = \lvert A(x)\rvert^2$ A = amp. di Probabilità, I = Probabilità	SI

4.1. Dualità onda-particella

Particelle elementari come elettroni e fotoni mostrano una duplice natura, sia corpuscolare che ondulatoria.
In generale lo stesso oggetto fisico, ad esempio un elettrone, sarà:

1. **Un'Onda** con **lunghezza d'onda** $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
2. **Una Particella** con massa **m**, posizione **r** al tempo **t** e impulso $p = mv$

Il **fotone** è oggetto fisico speciale, ha **massa a riposo = 0**. E' **un'onda** con velocità **c**, frequenza **f**; lunghezza d'onda λ; $c = \lambda f$
E' inoltre il **quanto di luce** (**la particella elementare della luce**) e la sua energia vale: $E = hf$, e il suo impulso è $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c} f$

5. La funzione d'onda

La descrizione dello stato di un sistema (di una particella) è data dalla funzione d'onda $\boldsymbol{\psi}\,(\mathbf{r},\mathbf{t})$. Tale funzione d'onda contiene tutta l'informazione che è possibile ottenere dal sistema. **$\boldsymbol{\psi}\,(\mathbf{r},\mathbf{t})$ è un'ampiezza di probabilità** (ha infiniti parametri, non sei)**.** $dP = |\psi|^2 dV$ è la probabilità di trovare la particella nel volume dV. Tale probabilità **non è epistemica**, ovvero non è dovuta alla nostra ignoranza. Si tratta di una probabilità **intrinseca al sistema**.

L'evoluzione della funzione d'onda $\psi\,(r,t)$ è determinata dall'**equazione di Schrödinger,** il cui risultato è completamente deterministico. Una particella di massa m, soggetta ad un potenziale $V(r,t)$ è descritta dall'equazione di Schrödinger, che predice esattamente l'evoluzione temporale della $\psi\,(r,t)$.

$$ih\frac{\Theta}{\Theta t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)$$

L'equazione di Schrödinger sostituisce il secondo principio della dinamica di Newton. L'equazione è lineare e quindi vale il **principio di sovrapposizione**, cioè la somma di due soluzioni è anch'essa una soluzione.

La funzione d'onda $\psi(r,t)$ è una <u>ampiezza di probabilità,</u> questo vuol dire che non è una grandezza fisica direttamente misurabile, ma è tale che il suo modulo quadro fornisce la probabilità di trovare la particella in (r,t).

$$P(r,t) = |\psi(r,t)|^2$$

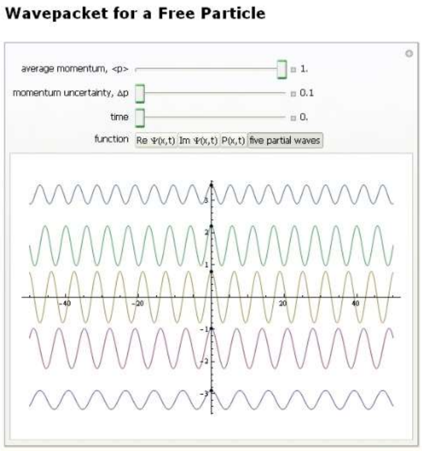
Gli esiti delle misure, all'interno dell'ampiezza di probabilità, risultano **casuali**.
Risolvendo l'equazione di Schrödinger si ha che la funzione d'onda ha, in genere, la forma matematica di una somma di onde, il cosiddetto "pacchetto d'onde".

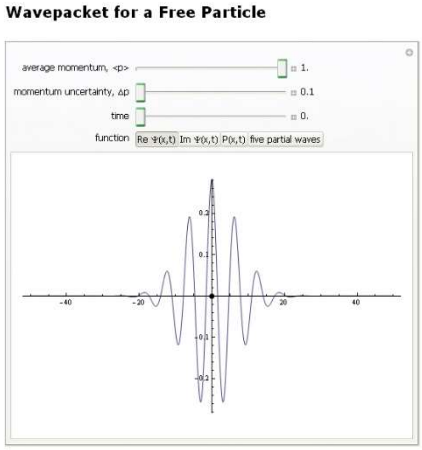
Schema di un (semplice) pacchetto d'onde:

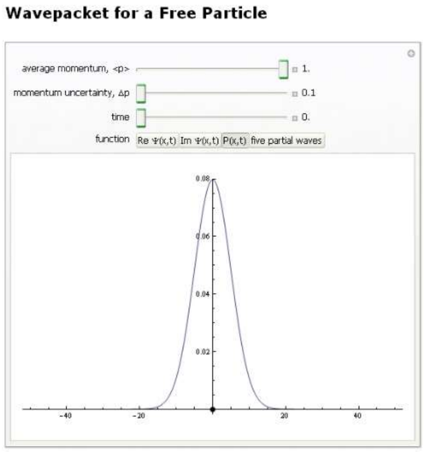
Le 5 onde che compongono la funzione d'onda

La funzione d'onda $\psi(r,t)$

La Probabilità $P(r,t) = |\psi(r,t)|^2$







Simulazioni con Mathematica:
http://demonstrations.wolfram.com/topics.html

→ Physical Sciences → Physics → Quantum Physics → Wavepacket for a Free Particle:
http://demonstrations.wolfram.com/WavepacketForAFreeParticle/
http://www.wolfram.com/products/player/download.cgi

5.1. Il significato della probabilità

In meccanica classica la probabilità associata ad un evento è dovuta al fatto che, in genere, non conosco tutte le variabili del sistema. (Es. Il lancio di un dado, Il tiro con l'arco.) E' la cosiddetta probabilità «epistemica» cioè legata ad una mancanza di conoscenza. In teoria se potessi misurare tutto, conoscerei tutto [Laplace].

In meccanica quantistica **La descrizione completa** dello stato di un qualunque sistema, è data dalla funzione d'onda **ψ(r,t)** che rappresenta l'ampiezza di probabilità associata al sistema.
La funzione d'onda ci dà il massimo dell'informazione possibile su di un sistema, che può essere solo probabilistica.
E' la cosiddetta probabilità «non epistemica», cioè non è dovuta ad una mancanza di conoscenza dello stato iniziale di un sistema. **La probabilità è intrinseca alla realtà.**

6. Il principio di indeterminazione (Heisenberg, 1927)

Non possiamo, per una questione di principio, conoscere tutti i dettagli del presente. Alcune coppie di grandezze (x, p) , (E, t) non possono avere, contemporaneamente, valori arbitrariamente precisi. Esse non hanno intrinsecamente un significato contemporaneo , indipendentemente dal fatto se vengano osservate o no. Se una delle due grandezze è conosciuta molto bene… l'altra è molto incerta. Ma nel mondo macroscopico non ce ne accorgiamo.
Ad esempio le due grandezze $\vec{x}, \vec{p}$ non hanno più un significato contemporaneo nella rappresentazione della meccanica quantistica

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h$$

La posizione x e l'impulso p, non hanno contemporaneamente le proprietà di avere dei valori con una incertezza tale da violare la relazione di indeterminazione

In generale il principio di indeterminazione vale per tutte le variabili "che non commutano" (termine tecnico per indicare che il prodotto delle loro incertezze è sempre maggiore di zero)

L'indeterminazione appare quando viene misurata una quantità fisica. Ma è "intrinseca" alla natura (non è dovuta alla nostra ignoranza). Il sistema fisico "non possiede" contemporaneamente le proprietà delle variabili (x, p) oppure (E, t)

In meccanica classica un sistema è descritto da: massa, dimensioni, carica elettrica, colore, posizione, velocità…. Tutte queste grandezze sono misurabili. L'evoluzione del sistema è data dalle leggi di Newton, $F = ma$... La previsione in teoria è deterministica, ma in casi particolari può essere caotica. Le caratteristiche di un sistema semplice possono essere misurate e conosciute con precisione arbitraria (quasi). ($h = 0$)
In meccanica quantistica un sistema è descritto **completamente** da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, che **non è direttamente misurabile**. La $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ è legata alla probabilità di ottenere un certo risultato in una misura. Un sistema è descritto **completamente** da una funzione d'onda **ψ(r,t)**, che **non è direttamente misurabile**. La **ψ(r,t)** è legata alla probabilità di ottenere un certo risultato in una misura. Un sistema non possiede alcune proprietà fin quando non vengono misurate. La precisione è limitata per questioni di principio. ($h \neq 0$).

7. Il principio di sovrapposizione

7.1. Come si lavora con la funzione d'onda e le misure sul sistema fisico relativo

Se ho più possibilità [modalità] relative al verificarsi di un evento, per esempio se ho due modalità 1, 2 ognuna descritta da una funzione d'onda ψ_1, ψ_2, allora ho:

$$\psi_{tot} = \psi_1 + \psi_2 \qquad \textbf{e} \qquad P_{tot}(r, t) = |\psi_{tot}|^2 \tag{1}$$

Cioè:

- PRIMA si sommano le ampiezze di probabilità per calcolare la ψ_{tot}
- POI si fa il modulo quadro della ψ_{tot} per avere la probabilità.

Esempio:

Consideriamo la luce, cioè un'onda elettromagnetica, l'intensità luminosa in un punto x è proporzionale al quadrato del campo elettrico in quel punto:

$$I(x) \propto E^2(x) \tag{2}$$

Se in un punto x arrivano due onde luminose **1** e **2** : $E_1(x)$, $E_2(x)$, l'intensità luminosa risultante si calcola prima sommando le ampiezze del campo Elettrico risultante:

$\Rightarrow E_{tot}(x) = E_1(x) + E_2(x)$, e poi calcolando l'intensità dal quadrato del campo Elettrico totale.

$$I_{tot}(x) \propto [E_{tot}(x)]^2 = [E_1(x) + E_2(x)]^2 = \underbrace{[E_1(x)]^2}_{\text{Intensità di }\mathbf{1}} + \underbrace{[E_2(x)]^2}_{\text{Intensità di }\mathbf{2}} + \underbrace{\mathbf{2\, E_1(x) E_2(x)}}_{\textbf{Termine di interferenza}} \tag{3}$$

E' il termine di interferenza che fa la differenza fra una somma "classica" (due eventi che avvengono nello stesso luogo e che si sommano semplicemente) e la somma "quantistica" in cui c'è un termine di interferenza che può essere positivo, negativo o nullo.

Il termine di interferenza, se le due onde hanno la stessa frequenza ν, dipende dalla differenza di fase fra le due onde, cioè dalla differenza nel cammino percorso Δx.

$$2\,E_1(x)E_2(x) = 2\,E_1\,E_2\cos\delta\ ,\quad \text{dove la differenza di fase: } \delta = 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{4}$$

Δx	δ	$\cos\delta$	$2\,E_1\,E_2\cos\delta$	I_{tot} se $E_1=E_2$
0	0	1	$2\,E_1\,E_2$	$4E^2$
$\lambda/4$	90^0	0	0	$2E^2$
$\lambda/2$	180^0	-1	$-2\,E_1\,E_2$	0

7.2. Il principio di sovrapposizione delle onde

(applicato a sistemi descrivibili da un oscillatore armonico, o da una somma di oscillatori armonici, in generale da un sistema la cui equazione è l'equazione delle onde)

Se un sistema, descritto p.e. dalle equazioni di Maxwell, ha come soluzioni due onde $E_1(x,t)$, $E_2(x,t)$ allora anche:

$$E\,(x,t) = a_1\,E_1 + a_2 E_2 \tag{5}$$

sarà una soluzione del sistema, dove a_1 e a_2 sono due costanti arbitrarie.
La ragione è legata alla linearità delle equazioni che descrivono il sistema, è una proprietà matematica del sistema.

Esempio classico: se prendo una corda e vedo che posso farla vibrare con la frequenza f_1 $[A(t)\propto\cos\omega_1\,t]$, o con la frequenza f_2 $[A(t)\propto\cos\omega_2\,t]$ allora posso farla vibrare anche con l'ampiezza: $A = A_1\cos\omega_1\,t + A_2\cos\omega_2 t$ **, cioè anche la somma di soluzioni è una soluzione del sistema.**

7.3. Decomposizione spettrale

Descrizione di un sistema quantistico in termini di sovrapposizione di stati

Polarizzazione della luce:

Un raggio di luce si dice polarizzato quando la direzione di oscillazione del campo elettrico ha una direzione che non varia nel tempo (l'asse di polarizzazione = $\mathbf{e_P}$)

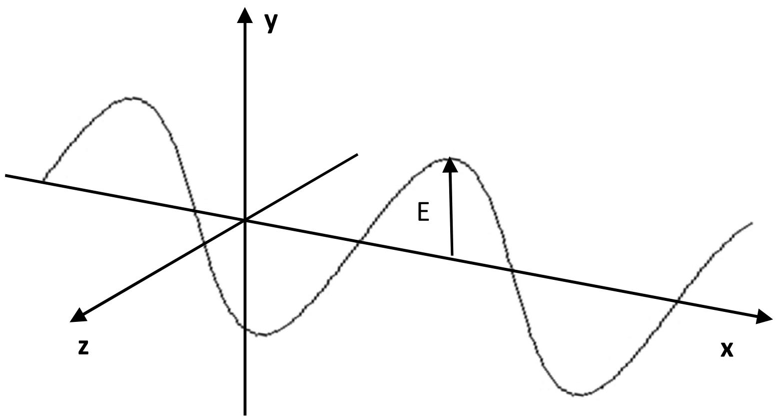


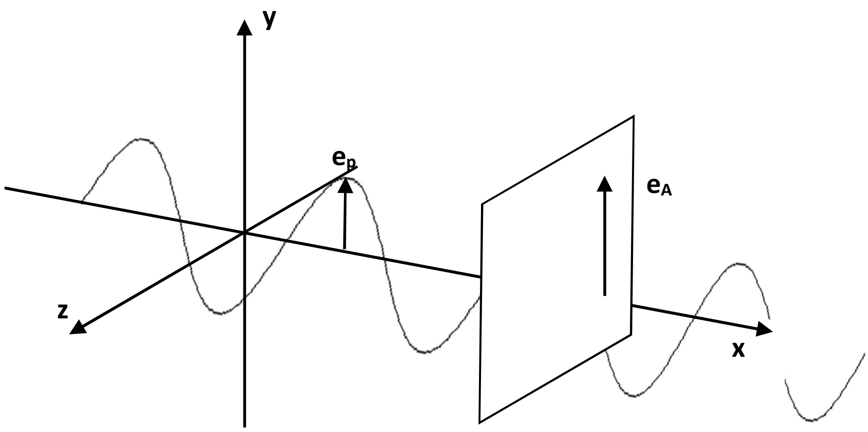
Fig. 1 Esempio: il campo elettrico oscilla lungo la direzione **y,** la luce quindi ha polarizzazione $e_p = y$**.**

Un polarizzatore (Analizzatore) è un elemento fisico, in genere piano, caratterizzato da una direzione particolare, la direzione del polarizzatore e_A, che seleziona la luce che incide su di esso, facendola passare tutta, o nulla, o una parte.

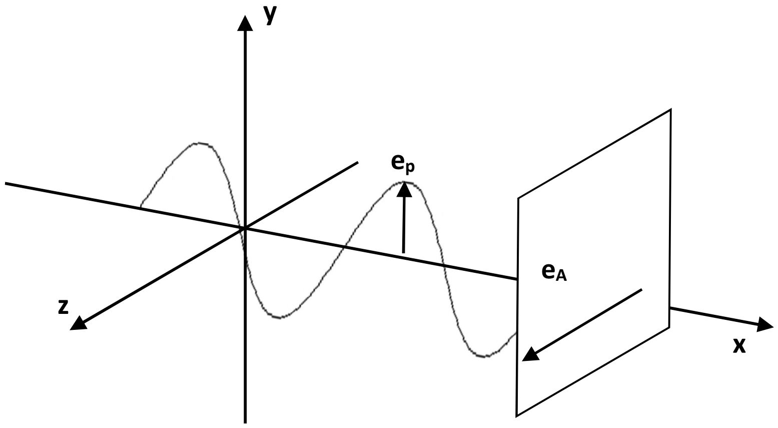
Se il polarizzatore e_A viene investito da luce polarizzata e_p, ho due casi limite:

$e_p = e_A \Rightarrow$ la luce passa:

$E_{out} = E_{in}$



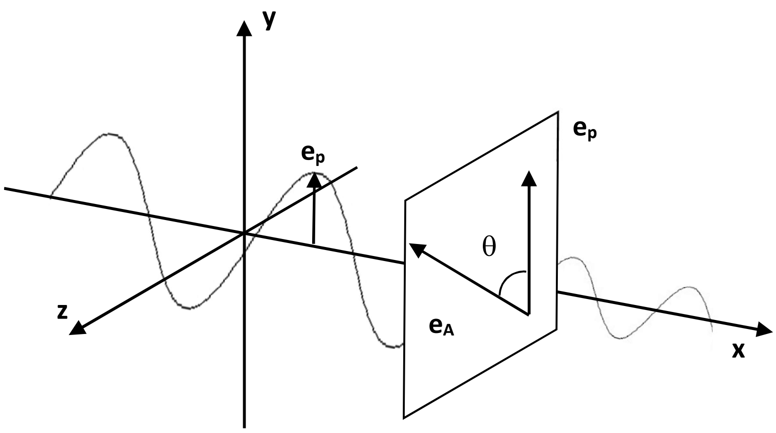
Se $\mathbf{e_p} \perp \mathbf{e_A} \Rightarrow$ la luce non passa: $E_{out} = 0$



Nel caso generale, in cui il polarizzatore fa un angolo θ con il la polarizzazione del campo elettrico ho:

$$E_{out} = E_{in} \cos\theta$$

quindi $I_{out} = I_{in} \cos^2\theta$



IMPORTANTE: il campo in uscita, più piccolo di quello in ingresso di un fattore $\cos^2 \theta$, ha polarizzazione $\mathbf{e_A}$

Questo vuol dire che un polarizzatore agisce attivamente su di un raggio di luce, non solo variandone l'intensità, ma anche cambiandone la polarizzazione

Supponiamo di inviare molta luce (tanti fotoni) al polarizzatore e_a, e consideriamo tre casi particolari:

Direzione	θ	cos θ	cos² θ	risultato
$\mathbf{e_p} = \mathbf{e_A}$	0	1	1	$I_{out} = I_{in}$
$\mathbf{e_p} \perp \mathbf{e_A}$	90^0	0	0	$I_{out} = 0$
$\mathbf{e_p} \angle \mathbf{e_A}$	45^0	$1/\sqrt{2}$	½	$I_{out} = I_{in}/2$

Se mandiamo tanti fotoni (N) , e **se $\theta = 45^0$**

- Una frazione N/2 dei fotoni passa

- Una frazione N/2 dei fotoni non passa

Quindi dal polarizzatore ne escono $\frac{N}{2}$, cioè la metà di N $\Rightarrow$ $I_{out} = \frac{I_{in}}{2}$

Ma cosa succede se la luce è talmente debole che al polarizzatore arriva un fotone alla volta di una luce con direzione di polarizzazione $\theta = 45^0$?

Se la luce è "tanta" (molti fotoni) l'intensità in uscita è semplicemente la metà di quella in ingresso, me se ho un solo fotone per volta, <u>non può</u> passare mezzo fotone!

Quello che succede, e la relativa "spiegazione" è data dall'interpretazione ortodossa della meccanica quantistica

7.4. L'interpretazione ortodossa della MQ (Copenhagen)

Ogni dispositivo di misura può dare solo alcuni risultati determinati (<u>autovalori</u>)

Nel caso del polarizzatore si hanno due soli risultati possibili:

1) il fotone passa,
2) il fotone non passa,

Ad ognuno dei due risultati possibili (passa ; non passa) corrisponde un <u>autostato</u> del sistema fisico da esaminare (in questo caso del fotone).

Esempio: Polarizzatore con polarizzazione $\mathbf{e_A} = \mathbf{y}$

I due auto valori sono "passa" ; "non passa"

Se l'autostato del fotone è $\mathbf{e_p} = \mathbf{e_A} = \mathbf{y}$ $\Rightarrow$ ho l'autovalore "passa"

Se l'autostato del fotone è $\mathbf{e_p} \perp \mathbf{e_A} = \mathbf{y}$ $\Rightarrow$ ho l'autovalore "non passa"

- Se il sistema in esame è in un "autostato" sappiamo con <u>certezza</u> il risultato della misura.
- Altrimenti possiamo sapere solo la probabilità di ottenere un certo risultato.

- Come si fa a calcolare la probabilità di ottenere un certo risultato?

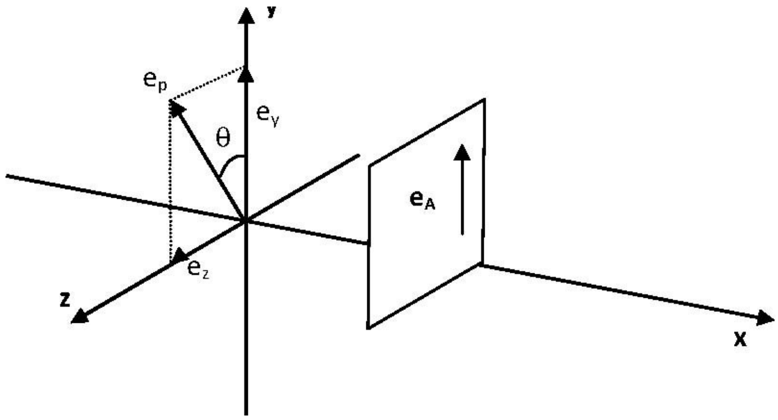
"Scomponiamo lo stato del sistema in una combinazione lineare degli autostati del sistema di misura" [è la decomposizione spettrale]

Nel caso del fotone $\mathbf{e_P}$ e di una misura fatta con un polarizzatore $\mathbf{e_A}$.

Scompongo lo stato e_p del fotone secondo due assi y,z:

$$\Rightarrow \ e_p = e_y \cos\Theta + e_z \mathrm{sen}\Theta$$

La probabilità di ottenere un certo risultato (che deve essere uno degli autovalori) è proporzionale al modulo quadro del coefficiente del rispettivo autostato.



Sia $e_A = y$ e $e_p = \cos\theta \cdot e_y + \text{sen}\theta \cdot e_z$

Cosa passa? Passa l'autostato $\mathbf{e_y}$, il coefficiente è $\mathbf{\cos\theta}$, la probabilità di ottenere che passi è $\mathbf{\cos^2\theta}$.

Se ho, per esempio, θ=45⁰, allora $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$, cioè passa 1 fotone ogni 2.

Il risultato è che il fotone, che aveva polarizzazione $\mathbf{e_P}$, passa o non passa con probabilità del 50%.

- Cosa succede e cosa è successo

- Il fotone che passa (tutti i fotoni che passano) risulta polarizzato secondo la direzione del polarizzatore $\mathbf{e_A}$
- C'è stato un brusco cambiamento nello stato dei fotoni: $\mathbf{e_p} \rightarrow \mathbf{e_A}$. E' il cosiddetto "collasso" della funzione d'onda del sistema. Se avessi scelto un polarizzatore con un asse di polarizzazione diverso, il fotone che usciva sarebbe stato diverso.
- Il misuratore (l'interazione del sistema quantistico con il sistema "esterno") cambia il sistema fisico.
- Le probabilità (a priori) si realizzano in un risultato certo.
- La misura modifica (disturba) il sistema in esame.

In generale se ho uno sistema fisico descritto da una funzione d'onda ψ(r,t), e lo voglio "misurare", lo devo scrivere scomponendolo in tutti i possibili risultati.

PRIMA della misura: $\psi(r,t) = c_a\psi_a(r) + c_b\,\psi_b(r) + c_c\psi_c(r)$
Questo vuol dire che avrò la probabilità $|c_a|^2$ di ottenere $\psi_a(r)$, la probabilità $|c_b|^2$ di ottenere $\psi_b(r)$…

DOPO la misura: …**se** ho ottenuto $\psi_a(r) \Rightarrow \psi'(r,t) = \psi_a(r)$

A partire da una funzione d'onda ψ(r,t), la sua evoluzione temporale è descritta in modo completamente deterministico dall'equazione di Schrodinger; per esempio per una particella di massa **m** non relativistica, in presenza di un potenziale V(r):

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\,\Delta\psi + V(r)\cdot\psi$$

Esempi di soluzione ψ(r,t)

- Particella libera $\Rightarrow$ la soluzione è un'onda piana: $\psi(x,t) = A\cos(\omega t)\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})$

λ = costante, quindi p = costante , v = costante, $E = \frac{1}{2}mv^2 = $ costante

$\Delta p = 0$, da cui $\Delta x = \infty$, cioè l'onda è estesa in tutto lo spazio.

- In generale non si ha un'onda piana:

$\psi(r,t) = \psi_1(r) + \psi_2(r) + \psi_3(r)$ ….. è il cosiddetto "pacchetto d'onde"

Simulazioni:
Vedi il sito di PHET:
http://phet.colorado.edu/
→ How to Run Simulation → Full installation → Download installer
Una volta installato → Play with Sims
http://phet.colorado.edu/en/simulations/category/new

→ Simulations → Physics → Wave Interference
→ *Quantum tunnelling and wave paket*:
barriera alta a destra + misura, oppure: barriera bassa al centro + misura

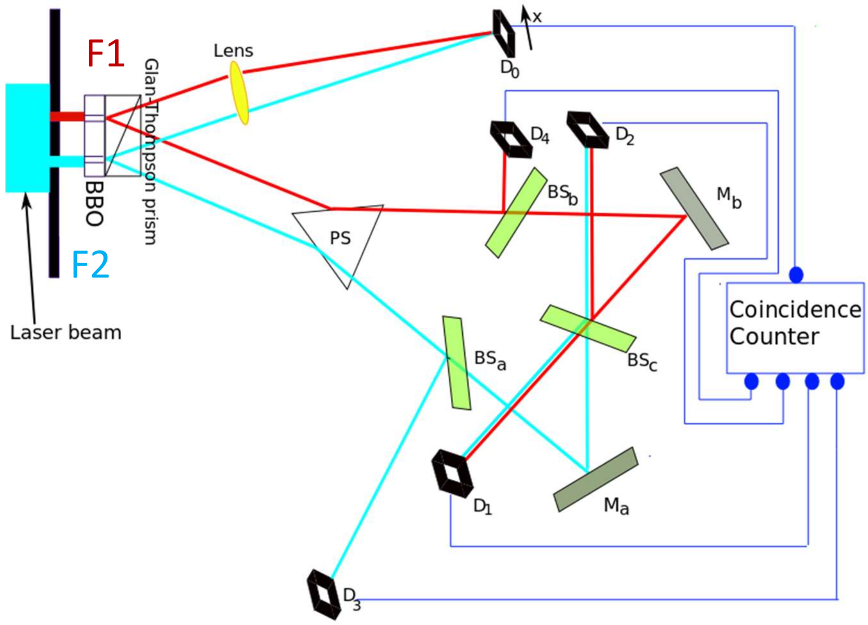
7.5. Il gatto di Schrödinger

Il Gatto è un esperimento ideale in cui si applica ad un sistema macroscopico la sovrapposizione delle funzioni d'onda.
La probabilità di decadimento dell'atomo radioattivo è del 50% ogni ora. Dopo un'ora: come sarà l'atomo? Come sarà la fiala? Come sarà il gatto?
Idealmente, se il sistema fosse microscopico e non interagisse con niente sarebbe nella sovrapposizione dei due stati possibili…e farei collassare la funzione aprendo la scatola per vedere come sta…

$$\begin{cases} \text{Atomo decaduto} \rightarrow \text{fiala rotta} \rightarrow \text{gatto avvelenato: } \psi = \psi(1) \\ \text{Atomo non decaduto} \rightarrow \text{fiala sana} \rightarrow \text{gatto sano: } \psi = \psi(2) \end{cases}$$

7.6. Un problema molto più grave del gatto: gli esperimenti a scelta ritardata

Cancellazione quantistica a scelta ritardata (Delayed choice quantum eraser)
Scully et al, 1982, *proposta teorica.* Kim et al., 2000, *l'esperimento.*



1. Il laser emette singoli fotoni che passano attraverso le due fenditure F1 e F2.
2. Dopo le fenditure i fotoni incontrano un cristallo di BBO che crea due fotoni entangled «identici», a parte la polarizzazione.
3. La coppia di sopra viene collimata sullo schermo D0 che misura se ci sia o no interferenza.
4. La coppia di sotto, dopo un cammino molto più lungo, trova dei beam splitter (50% di probabilità di passare o venir riflessi), che inviano i fotoni ai contatori D3-D4 (Si sa da dove è passato il fotone) oppure D1-D2 (l'informazione viene cancellata)
5. **I fotoni per cui so da che fenditura provenivano non danno interferenza**
6. **I fotoni per cui ho «cancellato» questa informazione mantengono l'interferenza.**
7. **Ma la «scelta» se mantenere o cancellare l'informazione viene fatta nei $BS_{a,b,c}$….molto tempo dopo che il fotone di sopra è arrivato in D0 ed è stato registrato…**

8. L'argomento EPR

Il 25 marzo 1935 Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) pubblicano un articolo dal titolo:
La descrizione della Realtà della Meccanica Quantistica può considerarsi completa?
Il punto, in breve, è questo:

- La MQ dice che: la descrizione della realtà avviene tramite la funzione d'onda, che rappresenta TUTTA l'informazione che si può avere su di un sistema.
- Tramite un esperimento mentale EPR dimostrano che in realtà la funzione d'onda NON descrive completamente le proprietà di un sistema…quindi manca qualcosa.

Ora vediamo di chiarire il significato dell'esperimento EPR, e come la «soluzione» sia stata trovata solo nel 1982, stravolgendo la nostra idea di realtà.

La versione O:

(fin troppo facile, in realtà non chiarisce le proprietà dei sistemi "entangled").

1) Consideriamo un sistema fisico composto da due sistemi [A,B] "opportunamente preparati" e separiamoli portandoli a grande distanza (d). La preparazione è tale che la misura di alcune proprietà su di un sistema fornisce lo stesso valore su entrambi i sistemi

2) Misuriamo una certa proprietà P(A) al tempo t*. La misura inizia a t* e finisce a $t^* + dt$; la distanza d è tale che $d \gg c \cdot t^*$

3) Sapremo quindi con certezza il valore della stessa proprietà P(B) al tempo t*.

4) Dato che non c'è stato il tempo di comunicare a B il risultato di A, se ne deduce che B possedeva quella proprietà prima dell'istante t*.

5) Ma la MQ ci fornisce solo la probabilità di avere un certo risultato per P(B) al tempo t*.

6) Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non può prevedere.

7) Quindi la teoria è incompleta.

8.1. La notazione di Dirac

Ogni sistema fisico è descritto dalla relativa funzione d'onda $\psi(r,t) - \psi$

Consideriamo un generico stato ψ ottenuto da una combinazione di due stati ψ_1 e ψ_2 ognuno dei quali rappresenta uno stato diverso [per esempio ψ_1 = "V" può essere lo stato di un fotone con polarizzazione verticale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione verticale, e ψ_2 = "O" lo stato di un fotone con polarizzazione Orizzontale, cioè un fotone che ha il 100% di probabilità di passare un test di polarizzazione orizzontale]

$$\psi = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 \qquad (1)$$

Dove le probabilità di ottenere lo stato ψ_1 o ψ_2 sono, rispettivamente:

$$P_1 = P(\psi_1) = [a_1]^2 \text{ e } P_2 = P(\psi_2) = [a_2]^2 \qquad (2)$$

La notazione di Dirac è la seguente:

$|\ldots>$ = rappresenta lo stato di un sistema ψ che, per esempio, se supponiamo di sottoporre lo stato ad una certa misura che ha due possibili risultati, si può scrivere come somma di due stati (risultati possibili) diversi:

i fattori a_1 (a_2) sono i coefficienti che determinano la probabilità di ottenere lo stato ψ_1 (ψ_2)

$$|\psi> = a_1 |\psi_1> + a_2 |\psi_2>$$

Le $|\psi>$ sono le funzioni d'onda che descrivono gli stati. Notare che ψ_1 e ψ_2 corrispondono ai due soli risultati reali e possibili di una eventuale misura.

Per esempio nel caso di un fotone, polarizzato V = Verticalmente (O = Orizzontalmente) posso scrivere:

|V>: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Verticale.

|O>: è lo stato di un di un fotone che passa al 100% un test con un polarizzatore Orizzontale.

Nel caso di un fascio di luce (un fotone) con polarizzazione a 45^0, posso scomporre lo stato secondo due qualunque direzioni ortogonali, per esempio (V,O) e scrivere (principio di linearità):

$$|\psi> = |45° > = \frac{1}{\sqrt{2}} |V> + \frac{1}{\sqrt{2}} |O> \qquad (3)$$

dove i fattori $\frac{1}{\sqrt{2}}$ servono ad assicurare che la probabilità totale che il fotone "passi" il test o che "non passi" il test sia **1**, cioè sia lo stato "certo" [sono sicuro che il fotone o passa il test o non lo passa, non ho altre possibilità].

Infatti ho: $P\ (\text{passa V}) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50°$

$$P\ (\text{passa O}) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50° \qquad (4)$$

Si noti che il fotone a 45° ha il 100% di probabilità di passare il test a 45°, quindi il fotone "possiede oggettivamente" la proprietà di avere una certa polarizzazione (vedi definizione di A.E. nell'EPR)

8.2. L'esperimento EPR

La trattazione segue quasi alla lettera la discussione dell'esperimento EPR fatta da G. C. Ghirardi nel libro "Un'occhiata alle carte di Dio" (2009). Queste poche righe sono una minima traccia del discorso logico, si consiglia di leggere il testo di G.C. Ghirardi per le molte ed approfondite discussioni dei punti chiave e delle sottigliezze legate al paradosso EPR.

8.2.1. Stati fattorizzati

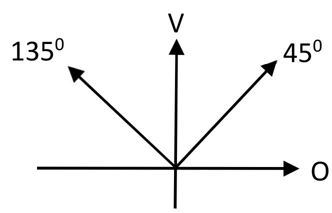
Nel grafico sono indicate le direzioni delle due coppie di assi relativi alla polarizzazione dei fotoni o dei polarizzatori che verranno utilizzati inseguito.

Considereremo due coppie di assi ortogonali:

1) la coppia (V,O): Verticale a 90^0 , Orizzontale a 0^0

2) la coppia ruotata di 45^0: le diagonali a 45^0 e a 135^0

Nota: gli assi devono essere ortogonali perché così mi riduco a due casi (strumenti di misura) in cui un risultato esclude l'altro e i due risultati comprendono tutte le possibilità.



Consideriamo una sorgente **S** che, opportunamente eccitata, emetta **due fotoni indipendenti 1 e 2**, uno con polarizzazione verticale **V** e l'altro con polarizzazione orizzontale **O**.

Gli stati dei due fotoni possono essere scritti come:

$$|\psi_1> = |1, V> \quad e \quad |\psi_2> = |2, O> \qquad (5)$$

E lo stato totale dei due fotoni posso scriverlo come:

$$|\psi> = |1, V> \cdot |2, O> \quad \text{[nota: il prodotto "·" vuol dire che sono indipendenti]} \qquad (6)$$

Ecco cosa succede se faccio tre test di polarizzazione sui due fotoni, cambiando l'asse di polarizzazione di uno dei polarizzatori.

S è la sorgente; **|1,x> e |2,y>** sono i due fotoni emessi dalla sorgente; **P(O)**, **P(V)** e **P(45⁰)** sono i polarizzatori con l'asse di polarizzazione diretto rispettivamente **O**rizzontalmente, **V**erticalmente o a **45⁰**.

Risultato	**Polarizzatore**	**Sorgente di 2 fotoni**	**Polarizzatore**	
[passa al 100%] ⟵	**P(0)**	**|2,O>** ⟵ **S** ⟶ **|1,V>**	**P(V)** ⟶	[passa al 100%]
[passa al 100%] ⟵	**P(0)**	**|2,O>** ⟵ **S** ⟶ **|1,V>**	**P(O)** ⟶	[**NON** passa al 100%]
[passa al 100%] ⟵	**P(0)**	**|2,O>** ⟵ **S** ⟶ **|1,V>**	**P(45⁰)** ⟶	[passa al 50%] [**NON** passa al 50%]

Si ricorda che il risultato della misura: "passa al 50%" sta a significare che la probabilità che passi sarà il 50%, quindi se ripeto la misura per esempio 100 volte, avrò "in media" che passerà 50 volte. Se faccio una sola misura avrò la probabilità del 50% che il fotone passi o che non passi, quindi sul risultato della singola misura non posso fare previsioni certe.

Perché nel terzo caso il fotone **|1,V>** passa o non passa al 50%?

Scomponiamo lo stato |1,V> secondo le due direzioni 45⁰ e 135⁰ [vedi formula (9) per la scomposizione di uno stato secondo due direzioni ortogonali]:

$$|1, V> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1{,}45° > \; + \frac{1}{\sqrt{2}}|1{,}135° > \qquad (7)$$

Inseriamo a questo punto la (7) nella (6), ottengo:

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1{,}45° > \cdot\ |2, 0 > \; + \frac{1}{\sqrt{2}}|1{,}135° > \cdot\ |2, 0 > \qquad (8)$$

La (8) rappresenta lo stato di partenza dei due fotoni. Se ora faccio un test con il polarizzatore a 45⁰ sul fotone 1, ho che **il fotone passerà il test**

Prima della misura: $|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1{,}45° > \cdot\ |2, 0 > \; + \frac{1}{\sqrt{2}}|1{,}135° > \cdot\ |2, 0 >$

con la probabilità di $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{1}{2} = 50°$

E' importante capire cosa succede **dopo** la misura.

Se il fotone **supera il test** (e questo avviene con la probabilità del 50%), subito dopo la misura, quindi all'uscita del polarizzatore, avrò avuto il collasso della funzione d'onda nello stato di uscita, il fotone avrà acquisito con certezza la polarizzazione a 45⁰, e la funzione d'onda sarà diventata:

Dopo la misura: $|\psi> = \; |1{,}45° > \cdot\ |2, 0 > \qquad (9)$

cioè, essendo il fotone a 45⁰, non ho più la parte di $|\psi>$ che descriveva lo stato del fotone 1 a 135⁰.

8.2.2. Stati entangled

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, in cui avevo lo stato (6), con un fotone **O** ed uno **V**, posso creare i seguenti stati, uno stato con i due fotoni entrambi |**V>** ed un altro con i due fotoni entrambi |**O>.**

$$|\Phi> = |1,V> \cdot |2,V> \qquad |\Lambda> = |1,O> \cdot |2,O> \tag{10}$$

Ora creiamo lo stato somma (cioè sovrapposizione lineare) dei due precedenti:

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi> + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Lambda> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,V> \cdot |2,V>) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,O> \cdot |2,O>) \tag{11}$$

Lo stato $|\psi>$ che abbiamo creato viene chiamato stato **"entangled"** ed ha una serie di proprietà molto particolari:

Supponiamo di sottoporre lo stato ad un test di polarizzazione Verticale sul fotone 1: il fotone 1 ha il 50% di probabilità di passare il test Verticale.
Lo stesso risultato (50%) si avrebbe se facessi un test di polarizzazione Orizzontale sul fotone 1, o un test di polarizzazione Orizzontale o Verticale sul fotone 2. Avrei sempre una probabilità del 50% di passarli.

Supponiamo ora di voler fare un test con un polarizzatore a 45^0 oppure a 135^0 (direzioni ortogonali fra loro). Servono un po' di calcoli, vanno scomposti gli stati dei due fotoni secondo le nuove direzioni….il risultato è che posso scrivere lo stato $|\psi>$, <u>lo stesso di prima</u>, come:

$$|\psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,|1{,}45> \cdot |2{,}45> + |1{,}135> \cdot |2{,}135>] \tag{12}$$

Si vede che, analogamente al caso precedente [formula (11)], la probabilità di passare un test a 45^0 oppure a 135^0 è sempre del 50% sia per il fotone 1 che per il fotone 2.

$$P_1(45) = P_2(45) = 50\% \tag{13}$$
$$P_1(135) = P_2(135) = 50\% \tag{14}$$

Questo ragionamento, fatto per le due direzioni (O,V)=(0^0, 90^0) e poi per le due direzioni (45^0,135^0), vale per qualunque altra coppia di direzioni ortogonali: (20^0,110^0), (30^0,120^0), (110^0,200^0), vale per qualunque angolo …

…cioè ognuno dei due fotoni ha una Probabilità $P = \frac{1}{2}$ di passare un test lungo una qualsiasi direzione arbitraria: **SEMPRE**.

- $\Rightarrow$ **Non esiste alcuna direzione in cui la Polarizzazione possa essere preveduta con certezza.**
- $\Rightarrow$ **Ma in ogni caso il risultato ottenuto per qualunque test <u>è lo stesso</u> per tutti e due i fotoni.**

Il termine "entangled" sta appunto a significare questa caratteristica di "interlacciamento" fra due fotoni, ben differente dai due fotoni fattorizzati incontrati precedentemente, in cui entrambi si comportavano indipendentemente da quanto avveniva all'altro fotone.

Se per esempio faccio un test di polarizzazione sul fotone **1** lungo una qualsiasi direzione **n**(arbitraria), e se suppongo che passi il test, ottengo in uscita lo stato:

$$|\psi> = \ |1, n> \cdot \ |2, n> \qquad (15)$$

Quindi dopo la misura sul fotone **1** (supponendo che abbia passato il test **"n"**, e questo avviene nel 50% dei casi) ho che il fotone **2** ha "acquisito" la polarizzazione **n,** cioè sono sicuro, (ho una probabilità del 100%) che passerà un test di polarizzazione secondo **n.**

Il punto essenziale dello stato entangled è questo:

- **Prima di ogni misura posso solo dire che avrò il 50% di probabilità di passare un qualunque test di polarizzazione secondo una qualunque direzione n. Prima della misura, nello stato entangled, i fotoni NON hanno la proprietà "Polarizzazione",** cioè non esiste nessuna direzione per cui posso prevedere con certezza il risultato (vedi la definizione di *Realismo* dell'EPR)
- **Dopo una misura (secondo n) avrò il 100% di probabilità di passare lo stesso test sia per il fotone misurato che per l'altro. I due fotoni avranno entrambi acquisito la proprietà di essere polarizzati secondo n.**

8.2.3. L'argomento EPR

Le definizioni/premesse dell'articolo EPR.

1. Realismo: *se, senza disturbare in alcun modo un sistema, è possibile prevedere con certezza il risultato di una misura di un'osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente il sistema "possiede oggettivamente"* (per oggettivamente si intende: indipendente da qualunque osservatore e dal fatto che la misura in questione venga fatta oppure no) *la relativa proprietà.*
2. Località Einsteiniana: *gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.*

   Cioè qualunque segnale deve trasmettersi a velocità non superiore a quella della luce, la trasmissione "istantanea" di una informazione è impossibile.

✧ **Nell'articolo EPR gli autori assumono l'ipotesi di località per tutti i processi fisici.**

L'argomento è il seguente:

1. Assumiamo uno stato composto da due fotoni entangled come nella (11):

$$\psi(t) \ = \frac{1}{\sqrt{2}}[\ |1, V> \cdot \ |2, V> \ + |1, O> \cdot |2, O>] \qquad (16)$$

2. Facciamo viaggiare i due fotoni, in direzioni opposte, per un tempo t*, fin quando saranno: il fotone 1 in A , il fotone 2 in B. La distanza $AB = d$ è molto maggiore di $c \cdot dt^*$
3. Eseguiamo, al tempo t^* e nel punto A, un test di polarizzazione sul fotone **1** con un polarizzatore verticale = **V.** Se il fotone passa il test, allora un istante dopo lo stato del sistema sarà:

$$\psi(t + dt) = |1, V > \cdot\ |2, V > \qquad (17)$$

4. Quindi l'osservatore in **A**, solidale con il polarizzatore, potrà prevedere con certezza, senza disturbarlo, che il fotone **2** passerà un test di polarizzazione verticale con la probabilità del 100%, quindi con certezza, se facessi una misura in B la tempo $t^* + dt$.
5. Quindi il fotone **2** ha un elemento di realtà fisica, la polarizzazione V (vedi definizione di realismo), che non aveva prima dell'istante t*.
6. Ma, per l'ipotesi di località, la misura in **A** non può aver influito sul fotone **2** (anche se **A** avesse inviato un segnale a **B** alla velocità della luce, il segnale non avrebbe fatto in tempo ad arrivare a **B**), quindi il fotone **2** possedeva questa proprietà anche prima della misura fatta all'istante *t**, indipendentemente dalla misura fatta sul fotone **1**.
7. Quindi c'è un elemento di realtà che la teoria non è in grado di descrivere.
8. Quindi la teoria è incompleta.

8.3. EPR, commenti (GCG pag. 161-167)

Bohr: Bohr reagisce all'assunzione R di EPR dicendo: *... l'enunciato del criterio in questione risulta ambiguo per quanto concerne l'espressione "senza disturbare in alcun modo il sistema". Naturalmente, nel caso in esame non può in alcun modo invocarsi un disturbo meccanico del sistema in esame nell'ultimo stadio cruciale del processo di misura. Ma anche a questo stadio* emerge in modo essenziale il problema di un'influenza sulle precise condizioni che definiscono i possibili tipi di predizioni che riguardano il comportamento successivo del sistema... *il loro argomentare non giustifica la loro conclusione che la descrizione quantistica risulti essenzialmente incompleta... Questa descrizione può caratterizzarsi come una utilizzazione razionale di tutte le possibilità di una interpretazione non ambigua del processo di misura compatibile con l'interazione finita e incontrollabile tra l'oggetto e lo strumento di misura nel contesto della teoria quantistica.*

Born: Questo profondo pensatore incontrò particolari difficoltà nel cogliere il reale significato dell'argomento di EPR; egli espresse il suo punto di vista nei seguenti termini: *La radice delle differenze tra Einstein e me era l'assioma che eventi che si verificano in posti diversi A e B sono indipendenti uno dall'altro, nel senso che una osservazione circa la situazione in B non può dirci nulla circa la situazione in A.* Sarebbe difficile configurare un più radicale malinteso. Vedi l'esempio delle due scatole chiuse con una pallina Bianca in una e una Nera nell'altra.

Cosa succede se le allontano e poi ne apro una, guardando il colore della pallina.

Popper 1: A pagina 137 del libro *La teoria quantistica e lo scisma nella fisica* che raccoglie vari suoi scritti, egli presenta le sue critiche all'interpretazione ortodossa della teoria e attacca in particolare la posizione tradizionale circa la riduzione del pacchetto asserendo: *Senza dubbio la riduzione del pacchetto può verificarsi molto rapidamente; persino a velocità superluminale* (cioè maggiore di quella della luce), *come ho spiegato nella sezione 75 della Logica della Scoperta Scientifica; perché esso semplicemente non è un evento fisico - <u>è il risultato della libera scelta di nuove condizioni iniziali</u>.*

Popper 2: Parecchi anni dopo nello scrivere la prefazione al libro in oggetto Popper cade in un fraintendimento opposto ed altrettanto grave circa una situazione alla EPR. In questa occasione, contrariamente al caso precedente, si tratta di un'indebita sopravvalutazione della loro analisi. Difatti a pag. 27 del libro di cui stiamo parlando Popper propone un esperimento che costituisce una variante di quello di EPR e asserisce che *se l'interpretazione di Copenaghen risulta corretta*, allora l'esperimento da lui analizzato permette di inviare segnali superluminali. Popper presentò il suo gedanken experiment che, secondo lui, lasciava solo due alternative: o l'interpretazione ortodossa era corretta e allora ricorrendo al suo dispositivo sperimentale sarebbe risultato possibile inviare segnali superluminali, oppure non ci sarebbe stata azione istantanea a distanza e l'esperimento avrebbe costituito una falsificazione della teoria.

Pais: (*Sottile è il Signore*, del grande fisico Abraham Pais, 1982) *Si è a volte parlato del contenuto dell'articolo come del paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen. Andrebbe sottolineato che questa memoria non mette in evidenza né paradossi né difetti logici. Semplicemente essa conclude che il concetto di realtà aggettiva è incompatibile con l'ipotesi che la meccanica quantistica sia completa. Tale conclusione non ha inciso sugli sviluppi successivi della fisica ed è dubbio che lo farà mai*.(!!!)

A. Einstein: Se si suppone che gli sforzi per elaborare una descrizione fisica completa abbiano successo, la teoria quantistica statistica verrebbe ad assumere, nello schema della fisica del futuro, una posizione approssimativamente analoga a quella della meccanica statistica nello schema della fisica classica. Io sono fermamente convinto che lo sviluppo detta fisica teorica sarà di questo tipo; ma il cammino sarà lungo e difficile.

Io sono, di fatto, fermamente convinto che il carattere essenzialmente statistico della teoria quantistica contemporanea è esclusivamente da ascriversi al fatto che questa (teoria) opera con una descrizione incompleta dei sistemi fisici.

EPR, la frase conclusiva: Mentre noi abbiamo mostrato che la funzione d'onda non fornisce una descrizione completa della realtà fisica, abbiamo lasciato aperta la questione se una descrizione siffatta esista o no. Tuttavia noi crediamo che una teoria di questo genere sia possibile.9. Le disuguaglianze di Bell

Nota: Con la sua proposta Bell[3] non vuole direttamente falsificare o provare la MQ o altre teorie, ma solo la località dei fenomeni naturali. Il gedanken experiment da lui proposto utilizza due fotoni entangled, "preparati" quindi secondo alcune regole della MQ, ma il test viene fatto "senza sapere" come sono stati creati i due fotoni, le leggi della MQ (o di qualunque altra teoria fisica) non vengono mai utilizzate nel corso dell'esperimento. L'unica formula che viene utilizzata è quella relativa al calcolo della probabilità totale per eventi indipendenti.

Bell scrive delle disuguaglianze sperimentabili tali da dover essere verificate nel caso valga l'ipotesi di località. Poi si possono confrontarle con le previsioni di qualunque altra teoria, e tirarne le conseguenze.

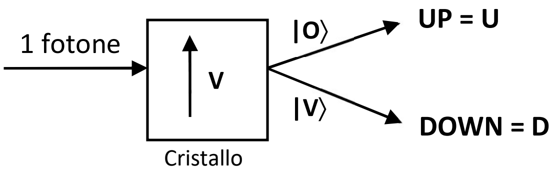
Nella parte che segue non vengono presentate le disuguaglianze di Bell proposte nel suo articolo originale del 1964, ma una versione più semplice, anche se rigorosamente corretta.

Una sorgente crea coppie fotoni entangled B e G : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|B,\alpha\rangle \cdot \ |G,\alpha\rangle + |B,\alpha+90^0\rangle \ \cdot |G,\alpha+90^0\rangle]$ dove α e **α+90**^{0} rappresentano due assi ortogonali qualunque riferiti alla grandezza misurabile "Polarizzazione" [vedi il capitolo sull'EPR: scomposizione di due fotoni entangled].

I due fotoni, che viaggiano in direzioni opposte, vengono inviati a due cristalli di calcite, ognuno con un asse di riferimento "**V**".

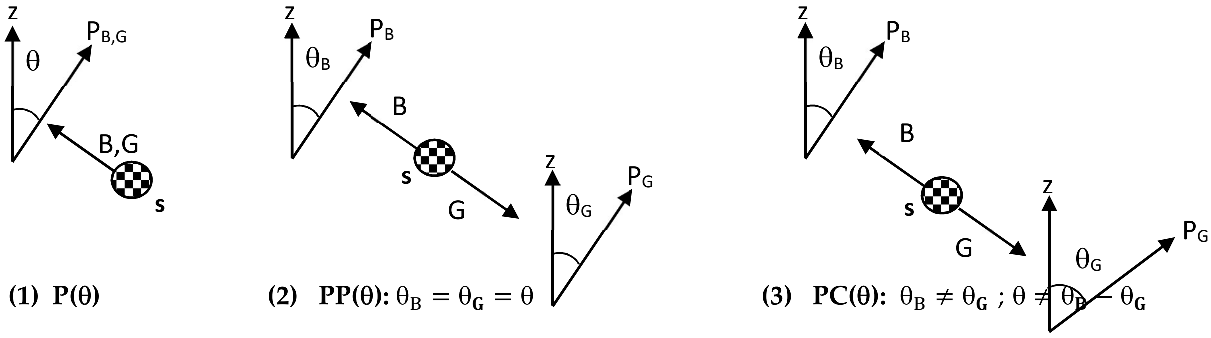
[3] J. Bell "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", *Physics,*I, 195 (1964

Il cristallo di calcite:
Se si invia un fotone ad un cristallo di calcite, caratterizzato da una direzione di riferimento V; dal cristallo esce sempre un fotone che, a seconda della polarizzazione, viene registrato come UP (polarizzazione Orizzontale) o come DOWN (polarizzazione Verticale) da due contatori di fotoni U & D.



Le misure sono fatte inviando N coppie di fotoni [B,G] ai cristalli, che partono ed arrivano una coppia per volta e registrando le sequenze di U e D registrate da ogni contatore. Le possibili misure sono tre, con differenti configurazioni dei cristalli, cioè dei relativi angoli dell'asse di riferimento del cristallo rispetto alla verticale.

Nella figura: **B** e **G** sono i due fotoni; **s** è la sorgente dei fotoni; **z** è un asse di riferimento (il laboratorio); $\mathbf{P_{B,G}}$ è la direzione dell'asse dei cristalli che misurano rispettivamente il fotone B e il fotone G; $\boldsymbol{\theta}$ è l'angolo fatto da ogni cristallo con la direzione di riferimento z.



(1) P(θ) **(2) PP(θ):** $\theta_B = \theta_G = \theta$ **(3) PC(θ):** $\theta_B \neq \theta_G$; $\theta \neq \theta_B - \theta_G$

Le tre misure che possono essere fatte, e un esempio di un risultato tipico dell'esperimento:

1) La Polarizzazione P(θ) per un singolo fotone B oppure G:
   P(θ): per qualunque angolo θ ho il 50% di probabilità di avere U o D, una sequenza tipica sarà per B o per G : UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU ~ (50% U ; 50% D)

2) La "Paired Polarization" PP(θ), Polarizzazione accoppiata:
   PP(θ): l'angolo è uguale, è la stessa situazione dell'EPR, le sequenze dei risultati U e D sono casuali, ma sono uguali. Esempio:
   B : UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU circa 50% U ; 50% D
   G : UUDUDUDUDDUDUDDDUUDU " "

3) La "Polarization Correlation", correlazione della Polarizzazione:
   PC(θ): gli angoli sono diversi, $\theta = \theta_G - \theta_B$. Le sequenze saranno diverse, per ogni conteggio ho un Match (M) se il risultato è lo stesso, un Errore (E) se è diverso. Esempio:

B :	UUDU	DUDU	DDUD	UDDD	UUDU	(N fotoni misurati)
G :	UUD**D**	DUD**D**	D**U**UD	UDD**U**	U**D**DU	(N fotoni misurati)
Match:	MMM	MMM	M MM	MMM	M MM	(N_M = numero di M=15)
ERRORE:	E	E	E	E	E	(N_E =numero di E=5)

Quindi si conta la frequenza dei Match = PC(θ) e quella degli errori E(θ), come il numero di eventi relativi (N_M o N_E) diviso il numero di eventi(conteggi) totali N:

$$PC = \frac{\text{Numero di Match}}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{N_M}{N} \qquad E = \frac{\text{Numero di errori}}{\text{Numero totale di conteggi}} = \frac{N_E}{N}$$

Risultati possibili per alcuni angoli particolari:

- $\theta = 0$ PC(0) = 100% = 1 E = 0% = 0 tutti i valori sono uguali
- $\theta = 90^0$ PC(90^0) = 0% = 0 E = 100% = 1 tutti i valori sono diversi
- Per gli angoli fra 0^0 e 90^0 ***E*** assumerà dei valori intermedi fra 0 e 1: **scelgo sperimentalmente l'angolo θ per cui E=1/4** (1 errore ogni 4 fotoni). Si trova che $\theta=30^0$.

Misure: ($\theta = \theta_G - \theta_B$)

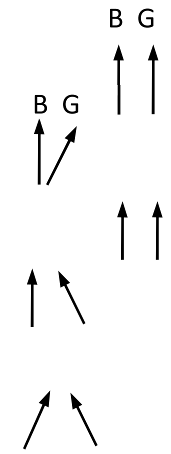
Allineati con **z**: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 0$; $\theta = 0$ → PC=1 E=0

G non allineato: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 30^0$; $\theta = 30^0$ → PC=3/4 E=1/4

Allineati: $\theta_B = 0$; $\theta_G = 0$; $\theta = 0$ → PC=1 E=0

G non allineato: $\theta_B = 0$; $\theta_G = -30^0$; $\theta = -30^0$ → PC=3/4 E=1/4

La misura di Bell:
Entrambi non allineati: $\theta_B = 30^0$; $\theta_G = -30^0$; $\theta = 2 \cdot 30^0$ → PC=? E=?



Il calcolo di Bell: **se vale la località** allora ruotare uno dei due cristalli non può influire sul risultato dell'altro perché le misure sono praticamente istantanee e non ci può essere una influenza istantanea a distanza (località). Quindi i risultati della misura dei due contatori sono eventi casuali indipendenti, la cui probabilità di accadimento congiunto è semplicemente la somma delle due probabilità singole. Quindi gli "Errori" (come i Match) totali, rispetto alla sequenza "giusta" , cioè quella che si avrebbe per θ = 0, devono essere la somma degli Errori misurati da ogni singolo [cristallo + contatore].
Quindi $E(\theta = 60°) = 2 \cdot E(\theta = 30°) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Tuttavia, nella sequenza, potrebbero esserci due errori nella stessa posizione, che darebbero un risultato giusto, Ad esempio:

Sequenza "giusta" : UUDU DUDU DDUD
B : U**D**DU DUD**D** DD**D**D (3 errori nella sequenza B)
G : UUD**D** DUD**D** D**U**UD (3 errori nella sequenza G)
Errori fra B e G: E E EE (4 errori totali < 3 + 3)

Quindi il numero degli errori totali sarà **minore o uguale** a quello del massimo teorico ($\frac{1}{2}$).
La disuguaglianza di Bell dice che, se vale la località, il numero di errori (per $\theta=60^0$) deve essere appunto $< \frac{1}{2}$:

La disuguaglianza di Bell: $\mathbf{E\,(località|60°) \le \frac{1}{2} = 0,5}$

La meccanica quantistica prevede[4]**:** $\mathbf{E(QM, teoria|60°) = \sin^2\theta = \frac{3}{4} = 0,75}$

[4] La probabilità che un fotone passi attraverso un polarizzatore che fa un angolo θ con il fotone è $P(\theta)=\cos^2\theta$ [Malus].

- Le misure, fatte nel 1982 da A. Aspect e collaboratori[5], ed il relativo calcolo teorico, sono state eseguite con contatori che avevano un'efficienza e < 1.
-

Il risultato sperimentale: E = 0,601 ± 0,020 (A. Aspect 1982)
La previsione della MQ: E = 0,612 (calcolo per un'efficienza <1)

- Ulteriori misure[6]:

Misura fatta utilizzando un set intero di disuguaglianze di Bell (4 valori degli angoli $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$):

Ipotesi di località (la disuguaglianza di Bell) $\mathbf{S(località) \leq 2}$
Previsione Meccanica quantistica $\mathbf{S(QM)_{teoria} = 2\sqrt{2} = 2,82}$
Misura $\mathbf{S(esperimento) = 2,73 \pm 0,02}$

∴ **Ma**: l'efficienza è ancora molto bassa (5%), i puristi non la ritengono una prova definitiva.

Conclusione 1. *L*'ipotesi di località è falsificata, la realtà è (può essere) non locale. Possono esistere interazioni non-locali, cioè con una correlazione immediata anche a grandi distanze, MA SOLO PER SISTEMI QUANTISTICI ENTANGLED (INTERLACCIATI).

Conclusione 2. Il risultato sperimentale è quello previsto dalla meccanica quantistica, che quindi non è locale. L'argomentazione di EPR è giusta, ma non la conclusione, questo perché l'ipotesi di partenza non era vera: non è la MQ ad essere incompleta, è l'ipotesi di località a dover essere cambiata. L'entanglement rende possibile **correlazioni** superluminali che risultano essere *unmediated, immediate, unmitigated:* non mediate, immediate, non mitigate. Ma non permette l'invio di **segnali** superluminali. La teoria della relatività non viene violata: l'osservatore in B non ha modo di accorgersi delle azioni di G; la sua statistica dei conteggi è sempre 50% U e 50% D.

9.1. La non-località oggi – La crittografia quantistica

La non-località, cioè la correlazione di fotoni interlacciati, può essere utilizzata per trasmettere messaggi criptati sicuri.
Infatti un eventuale «osservatore» esterno provocherebbe il collasso dello stato quantistico, le correlazioni andrebbero perse, e chi doveva ricevere il messaggio se ne accorgerebbe…
Viene utilizzato per transazioni sicure, il segnale viaggia con la fibra ottica dei segnali telefonici ad alta velocità e può essere trasmesso a un centinaio di chilometri (per ora).

[5] A. Aspect, Dalibard, G. Roger: *Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers,* Physical Review Letters 49, 25, 1804 (20 Dec 1982).
[6] G. Weihs et al., *Violation of Bell's inequalities under strict Einstein locality conditions*, Phys. Rev. Lett., 81,5039 (1998).